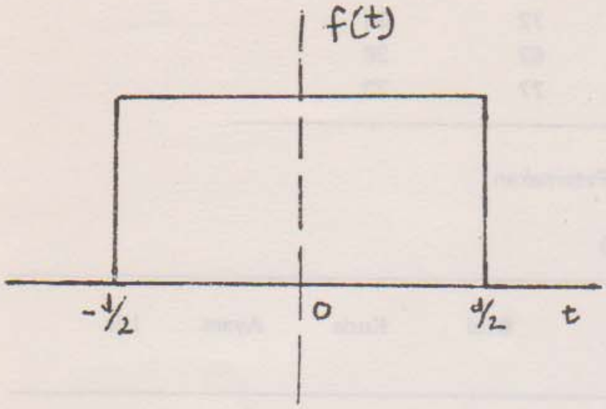
KONVOLUSI DAN DEKONVOLUSI
(Pengertian Dasar)

Bagian II

Oleh : Ir. Suhaimi Nurusman
PPTMGB "Lemigas" – Jakarta

Transformasi Fourier dari fungsi segi empat

Fungsi yang akan ditinjau adalah fungsi segi empat yang tidak periodik. Untuk mudahnya kita ambil titik asal (titik nol) pada pertengahan fungsi ini.



Fungsi f(t) dapat kita tulis : $f(t) = 1 \quad -d/2 \leqslant t \leqslant d/2$
$= 0$ untuk t lainnya.

Untuk menganalisa fungsi tidak periodik kita pakai integral Fourier, bukan deret Fourier.

Transformasi Fourier dari fungsi ini adalah:

$$G(f) = \int_{-\sim}^{+\sim} f(t)\, e^{-2\pi jft}\, dt$$

$$= \int_{-d/2}^{+d/2} 1 \,.\, e^{-2\pi jft}\, dt$$

$$= \int_{-d/2}^{+d/2} (\cos 2\pi ft - j \sin 2\pi ft)\, dt$$

$$= \int_{-d/2}^{+d/2} \cos 2\pi ft\, dt - j \int_{-d/2}^{+d/2} \sin 2\pi ft\, dt \ldots (*)$$

Karena sin 2 π ft adalah fungsi ganjil, maka $\int_{-d/2}^{+d/2} \sin 2\pi ft\, dt$ akan sama dengan nol, sehingga persamaan (*) berubah - menjadi :

$$G(f) = \int_{-d/2}^{d/2} \cos 2\pi ft\, dt$$

$$= 2 \int_{o}^{+d/2} \cos 2\pi ft\, dt$$

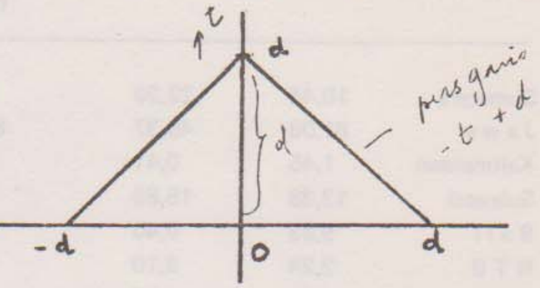
$$= 2 \frac{1}{2\pi f} \sin 2\pi ft\, dt\ \Big]_{o}^{d/2}$$

$$= \frac{1}{\pi f} \sin \pi fd = d\, \frac{\sin \pi fd}{\pi fd}$$

d sinus kardinal π fd.

$$= d \sin_c \pi fd.$$

Transformasi Fourier dari fungsi segitiga :



Fungsi segitiga ini adalah fungsi genap, karenanya akan kita tinjau bagian rielnya saja (cosinus).

$$G(f) = 2 \,.\int_{o}^{d} f(t)\, \cos 2\pi ft\, dt$$

$$= 2 \,.\int_{o}^{d} (-t + d) \cos 2\pi ft\, dt$$

misal : $u = (-t + d) \qquad du = -dt$

$$dv = \cos 2\pi ft\, dt \quad v = \int \cos 2\pi ft\, dt = \frac{\sin 2\pi ft}{2\pi f}$$

ingat : $\int u\, dv = uv - \int v\, du$

$$2\int_{o}^{d} (-t + d) \cos 2\pi ft\, dt = 2(-t + d) \,.\, \frac{\sin 2\pi ft}{2\pi f} \Big|_{o}^{d} + 2 \int_{o}^{d} \frac{\sin 2\pi ft}{2\pi f}\, dt. =$$

$$-\frac{2}{2\pi f}\cdot\frac{1}{2\pi f}\,.\cos 2\pi ft\,\Big|_{o}^{d}$$

$$2\frac{1}{(2\pi f)^2} - \frac{1}{(2\pi f)^2}\cos 2\pi fd =$$

$$2\frac{1}{(2\pi f)^2}.\ \left(2\sin^2\frac{2\pi fd}{2}\right)$$

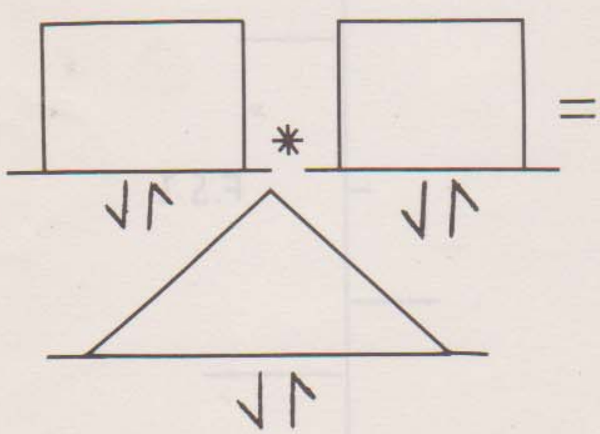
$$= d^2\,\frac{1}{(\pi fd)^2}\,\sin^2\pi fd = (d\,\sin_c\pi fd)^2$$

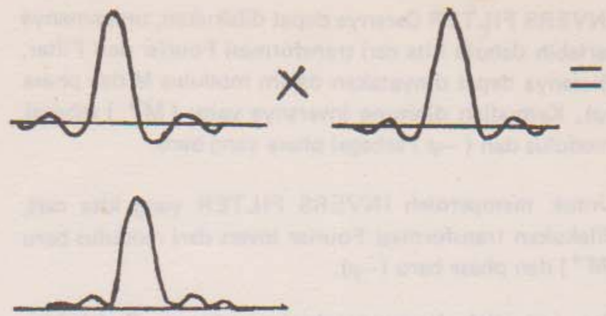
Kita lihat bahwa transformasi Fourier dari fungsi segitiga adalah kwadrat transformasi Fourier dari fungsi segi empat atau dengan kata lain t.F dari segitiga = t.F fungsi segi empat, *kali* t.f fungsi segi empat sebelum ini sudah ditunjukkan bahwa *konvolusi* antara fungsi segi empat dengan fungsi segi empat itu sendiri (auto konvolusi) menghasilkan fungsi segi tiga.

Jadi *konvolusi* di satu pihak adalah perkalian (multiplication) di pihak lainnya. Atau dengan bahasa teknik yang sudah populer "konvolusi di satu domain adalah perkalian pada domain lain.
Konvolusi biasanya dilambangkan dengan (*) dan perkalian (X).

time domain	t	$\underset{\longrightarrow}{\overset{\text{F.T.}}{\longleftarrow}}$	frekwensi domain	f
space domain	x	$\underset{\longleftarrow}{\overset{\text{F.T.}}{\longrightarrow}}$	wave number domain	k
	*	$\longleftrightarrow$	X	
	X	$\longleftrightarrow$	*	

Secara grafis hasil konvolusi fungsi segi empat dan hasil kali transformasinya kita gambarkan sebagai berikut :





IV. DEKONVOLUSI'

Dekonvolusi sering diartikan lawan konvolusi (contrary of convolution). Tapi hakekatnya adalah konvolusi juga. Sebagaimana halnya proses bagi (division) adalah proses perkalian dengan kebalikan pembagi. A : B = C adalah identik dengan $A \times \frac{1}{B} = C$. Pada dekonvolusi kita tidak punya notasi tersendiri. Umpamanya pada konvolusi g dengan f menghasilkan h, kita tulis $g * f = h$. Kalau sekarang kita ketahui g dan h ; maka untuk memperoleh f, biasa disebut proses dekonvolusi ; $+ f = h * \frac{1}{g}$

(harap diperhatikan bahwa $\frac{1}{g}$ dengan garis putus-putus). Jika transformasi Fourier dari $g \Leftrightarrow G$; $f \Leftrightarrow F$ dan $h \Leftrightarrow H$ maka $F = H \times \frac{1}{G}$.

Dalam elektronika dan/atau seismik dapat kita gambarkan :

INPUT * FILTER = OUTPUT
OUTPUT * INVERS FILTER ≅ INPUT
INPUT * FILTER * INVERS FILTER ≅ INPUT
INPUT * δ ≅ INPUT
FILTER * INVERS FILTER = δ

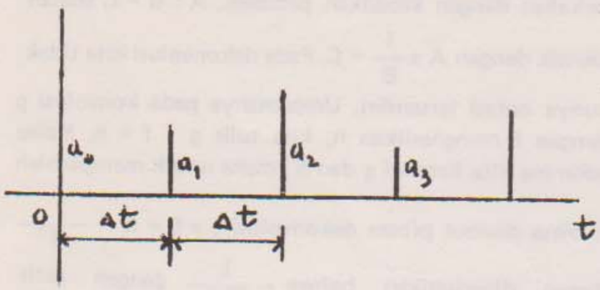
disebut fungsi Dirac yaitu (1, 0, 0, ...)
atau kalau digambarkan:

Persoalan kita sekarang adalah mencari $\frac{1}{g}$ atau

INVERS FILTER Caranya dapat dilakukan, umpamanya terlebih dahulu kita cari transformasi Fourier dari Filter. Biasanya dapat dinyatakan dalam modulus M dan phasa (φ). Kemudian dihitung inversnya yaitu (M^{-1}) sebagai modulus dan ($-\varphi$) sebagai phasa yang baru.

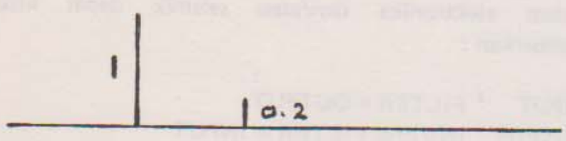
Untuk memperoleh INVERS FILTER yang kita cari, dilakukan transformasi Fourier invers dari modulus baru (M^{-1}) dan phase baru ($-\varphi$).

Cara lain ialah dengan pembagian polynom. Sudah kita terangkan bahwa konvolusi dapat kita lakukan dengan perkalian polynom. Dengan transformasi Fourier suatu fungsi dapat diuraikan menjadi deret sinus dan cosinus dimana kalau kita olah dapat dinyatakan dalam $e^{-2}\pi jft$; dangan sampling, fungsi dapat kita nyatakan dalam: $a_n e^{-2}\pi jf.n\Delta t$.



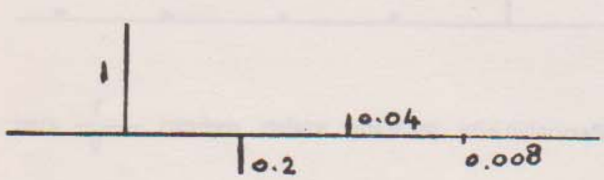
Kemudian $e^{-2}\pi jf\Delta t$ dapat kita nyatakan sebagai z (hal ini sering disebut transformasi z). Untuk mudahnya marilah kita lihat contoh-contoh berikut:

1)



Kita ingin mendapatkan inversnya.

Sebagaimana sudah dikemukakan inversnya adalah pembagian polynom, dalam hal ini 1 : 1 + 0.2 z. dan hsilnya adalah: $1 - 0.2\ z + 0.04\ z1 - 0.2\ z + 0.04\ z^2 - 0.008\ z^3 + \ldots\ldots$ jadi invers dari 1 + 0.2 z merupakan suatu deret yang konvergen, yang kalau digambarkan berbentuk sbb:

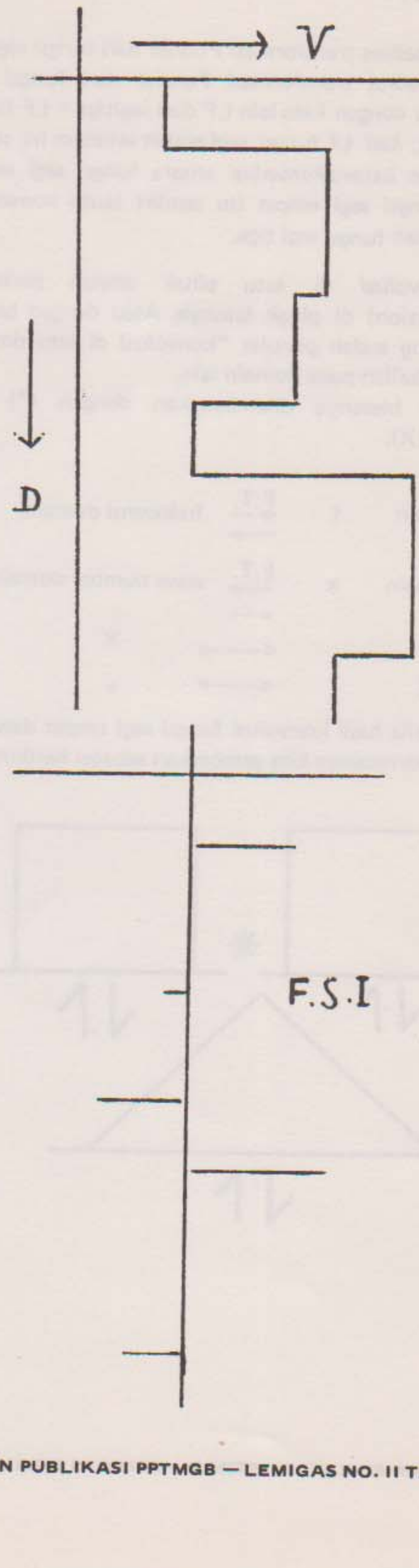


2) $1 + 2Z$. inversnya: $1 - 2Z + 4Z^2 - 8Z^3 + \ldots\ldots$ Suatu deret yang divergen, makin lama makin besar koefisiennya. Hal yang kedua ini disebut blow out, sedangkan dari contoh 1 disebut minimum phase.

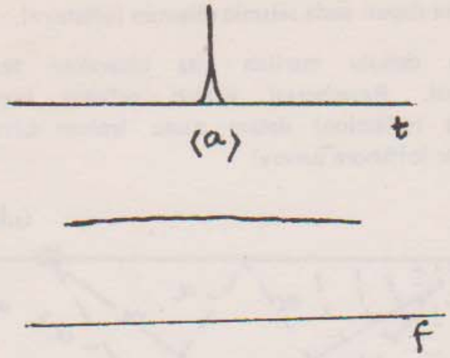
Untuk menguji hasil yang kita peroleh, lakukan konvolusi antara fungsi m ula-mula dengn inversnya dan hasilnya harus 1 (satu).

Pemakaian.

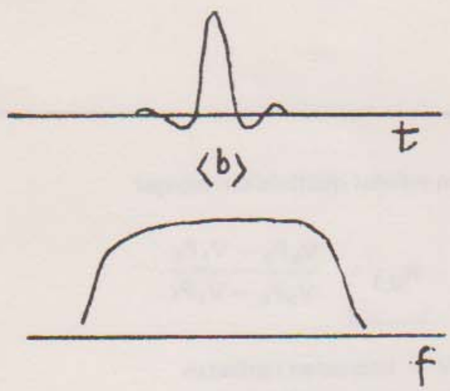
Dari "time section" seismik kita harapkan dapat menarik horizon atau marker dengan jelas dan mudah. Kalau kita bandingkan interval velocity sebagai fungsi dari kedalaman dengan time section teoritis (film syntetic impulse) adalah sebagai berikut :



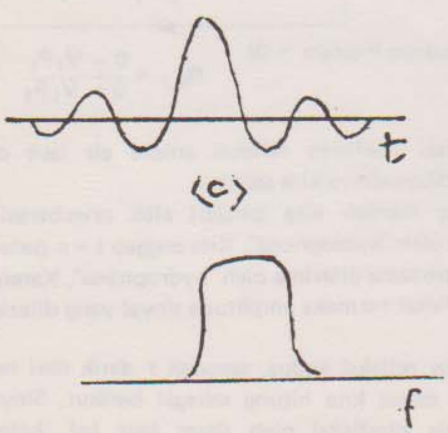
Tetapi hal ideal seperti FSI tidak dapat kita peroleh dari recording. Kenapa demikian; dapat dijelaskan sebagai berikut. Kita gunakan dinamit sebagai sumber energi berarti mengirim impuls sinyal.



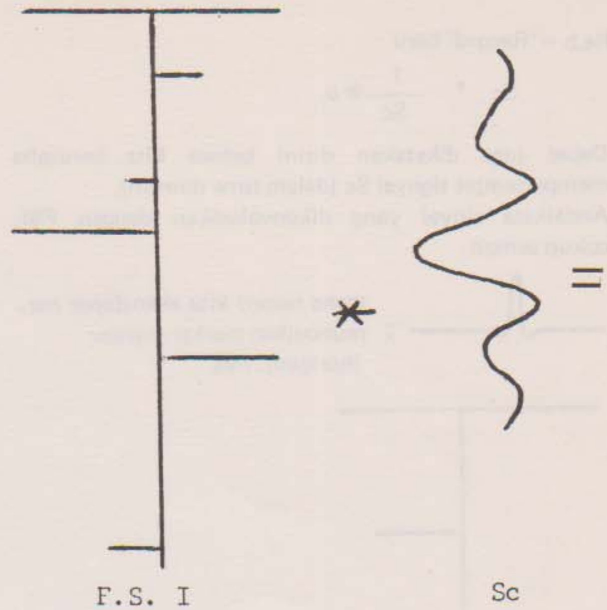
Sebagian dari frekwensi sinyal ini di serap oleh lapisan-lapisan tanah; sehingga setelah beberapa saat melalui lapisan tanah sinyal kita berubah bentuk menjadi:



Sewaktu sinyal mencapai geophone, frekwensi yang sampai makin menyempit, artinya sinyal melebar; sebagai berikut:



Yanag direcord jadinya adalah FSI * (signal c)



Kalau kita perhatikan 'Record' (Re) mentah ini, akan sukar sekali untuk menentukan dimana marker-marker (horizon)nya.

Sekarang bagaimana usaha kita mengolah "Re" mentah ini agar dapat memperoleh 'Record' yang mirip dengan FSI · Untuk itu kita cari anti signal Sc. Kemudian kita konvolusikan dengan Re.

$$\text{FSI} * \text{Se} = \text{Re}$$

$$\text{Re} * \frac{1}{\text{Sc}} \cong \text{FSI} = \text{Re.b}$$

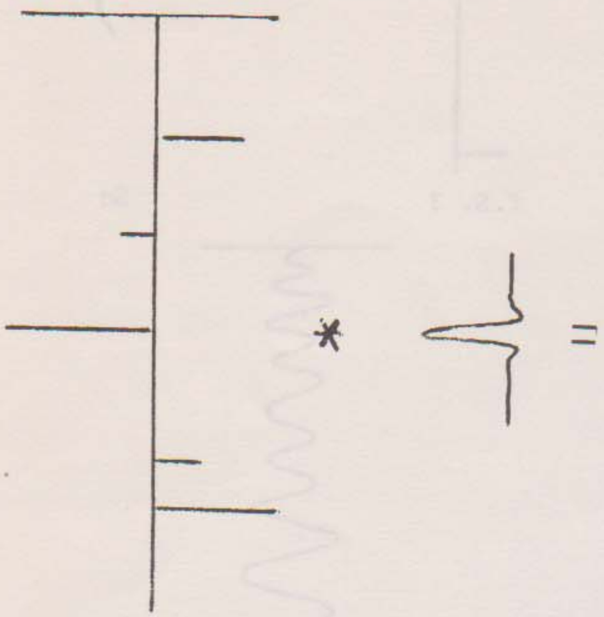
$$FSI * Sc * \frac{1}{Sc} \cong FSI = Re.b.$$

Re.b = 'Record' baru

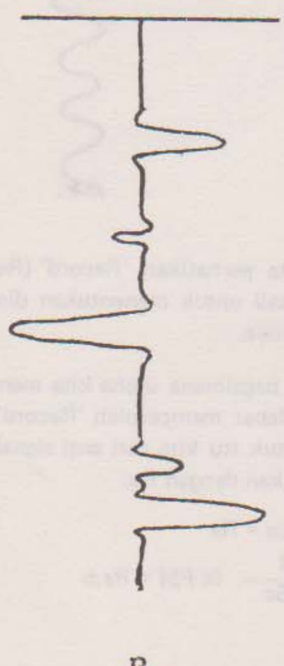
$$Sc * \frac{1}{Sc} \cong \sigma$$

Dapat juga dikatakan disini bahwa kita berusaha mempersempit signyal Sc (dalam time domain).
Andaikata sinyal yang dikonvolusikan dengan FSI, cukup sempit

; maka record kita akan dapat memunculkan marker-marker (horizon). nya



F.S.I

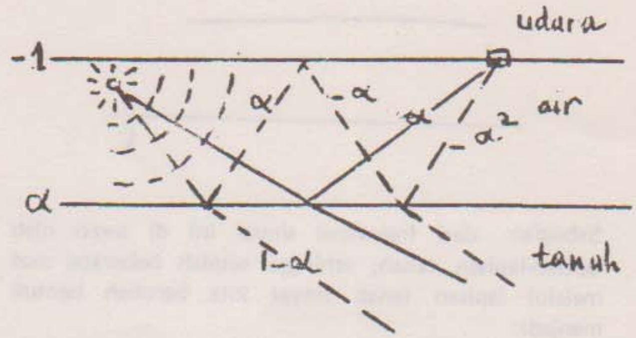


R_v

DEREVERBERASI
(Dereverberation)

Dereverberasi adalah proses atau usaha untuk menghilangkan reverberasi (reverberation, ringing) yang sering kita dapati pada seismic dilautan (offshore).

Terlebih dahulu marilah kita bicarakan tentang reverberasi. Reverberasi adalah refleksi berulang (multiple reflection) dalam suatu lapisan biasanya lapisan air (offshore survey)



Koefisien refleksi didifinisikan sebagai

$$R_{0.1} = \frac{V_0 P_0 - V_1 P_1}{V_0 P_0 - V_1 P_1}$$

dimana V = kecepatan rambatan

P = massa jenis dari lapisan yang bersangkutan.

Untuk udara air ; $\boxed{R_{o.1} = \frac{0 - V_1 P_1}{0 + V_1 P_1} = -1}$ (kita anggap bahwa P udara = 0).

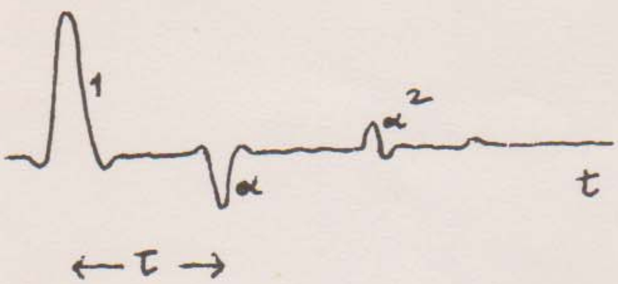
$$R_{0,1} = \frac{0 - V_1 P_1}{0 + V_1 P_1} = -1$$

Sedangkan koefisien refleksi antara air laut dengan lapisan dibawahnya kita sebut α.
Sekarang marilah kita pelajari efek reverberasi yang diterima oleh 'hydrophone'. Kita anggap t = o pada saat refleksi pertama diterima oleh 'hydrophone'. Karena koefisien refleksi = α maka amplitude sinyal yang diterima adalah α.
Kemudian refleksi kedua, sesudah τ detik dari refleksi pertama dapat kita hitung sebagai berikut. Sinyal ini mula-mula direfleksi oleh dasar laut (α), kemudian direfleksi oleh permukaan air (koefisien refleksi = −1; sinyal berobah polorisasi $-\alpha$). Achirnya direfleksi lagi oleh dasar lautan, baru mencapai 'hydrophone'.

Jadi amplitude yang diterima oleh hydrophone adalah $-\alpha^2$. Dengan cara yang sama dapat kita hitung amplitude sesudah 2τ ,3τ dst. Secara singkat dapat kita tabelkan dibawah ini:

Sinyal	**Waktu**	**Amplitude**
S_0	0	α
S_1	τ	$-\alpha^2$
S_2	2τ	$\alpha^3 S$
S_3	3τ	$-\alpha^4$
S_4	4τ	α^5
S_n	$n\tau$	$-(-1)^{n+1}\alpha^{n+1}$

Kalau kita gambarkan amplitude-amplitudo ini sebagai fungsi diskontinu akanberbentuk $\alpha, -\alpha^2, \alpha^3, -\alpha^4, \ldots.$ atau juga: $\alpha\,[1, -\alpha, \alpha^2, -\alpha^3, \ldots\ldots]$



Dalam 'time section' ini akan merupakan pengganggu dan menyukarkan kita mengenal horizon atau marker yang sebenarnya. Apalagi untuk laut dangkal, dimana 'τ' makin pendek, sehingga reverberasi ini berbentuk sinusoidal.

Bagaimana usaha kita untuk menghilangkan reverberasi ini?.
Kita cari transformasi Fourier dari fungsi reverberasi yang sudah kita turunkan tadi.

$$F(W) = 1 - \alpha e^{-jw\pi} + \alpha^2 e^{-2jw\tau} - \alpha^3 e^{-3jw\tau}$$

dengan $W = 2\pi f$

persamaan diatas tidak lain adalah suatu deret dengan pembanding $k = -\alpha e^{-jwt}$ = sedangkan jumlah

suatu deret ukur = $\dfrac{a}{1-k}$

Jadi $F(W) = \dfrac{1}{1 + \alpha e^{-jw\tau}}$

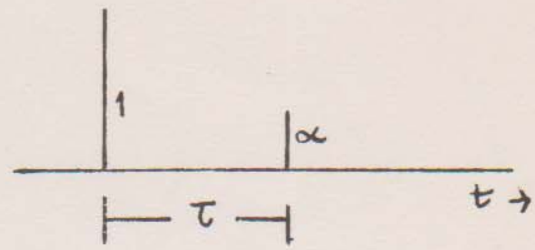
Menghilangkan reverberasi bararti menghapuskan pengulangan atau dari bentuk $f\left[1, -\alpha, \alpha^2, -\alpha^3, \ldots\right]$ kita inginkan bentuk $\left[1\,0\,0\,0\,0\ldots\ldots\right]$

atau: $F(t) * g(t) = \sigma$
$F(W) \quad G(W) = 1$

$$G(W) = \frac{1}{F(W)} = 1 + \alpha e^{-jw\tau}$$

Operator yang kita pakai untuk menghilangkan reverberasi adalah transformasi invers dari G (W) yaitu:

$$g(t) = \left[1 + \alpha\right]$$



Tetapi sebenarnya persoalan reverberasi tidak semudah dan sederhana ini, karena refleksi berulang yang timbul bukan hanya antara permukaan dan dasar laut saja.

Banyak variasi-variasi lain yang ada; suatu sinyal menembus dasar laut, kemudian direfleksi pada horizon berikutnya kembali kelapisan air dan di sini mengalami refleksi beberapa kali.

Kemudian timbul persoalan menentukan harga α dan τ Sebagaimana rumus koefisien refleksi sudah kita berikan maka:

$$\alpha = \frac{PaVa - PiVi}{PaVa - PiVi}$$

Pa, Va adalah massa jenis dan cepat rambat dalam air dapat kita tentukan tetapi Pi, Vi untuk lapisan dibawah dasar laut tidak dapat kita ketahui dengan pasti.

Adapun harga t secara pendekatan dapat dicari dari relasi berikut t = 2d dimana d = kedalaman air laut dan Va = cepat rambat dalam air laut.

Di sini kita tidak akan membicarakan tentang dereverberasi ini secara mendetail, karena tujuan kita adalah untuk memperlihatkan adanya hubungan antara dekonvolusi dengan dereverberasi. Sebagian geophysicist menganggap dereverberasi adalah dekonvolusi. Sedangkan yang lainnya berpendapat bahwa dekonvolusi adalah pengkerutan sinyal sedangkan dereverberasi adalahuntuk menghilangkan efek reverberasi.

DAFTAR BACAAN

–BRACEWELL, R.M.: "THE FOURIER TRANSFORM AND ITS APPLICATIONS", Mc. Graw Hill, New York, 1965

–SHERIFF, R.E.: "GLOSSARY OF TERMS USED IN GEOPHYSICAL EXPLORATION WITH 1969 ADDENDUM", reprinted from Geophysics, Vo. 33, No. 1, Feb. 1968 and Vol 34 No. 2, April 1969 Copyright 1968, 1969, Society of Exploration Geophysicist.

–PRICKLES, ERIC: "LECTURERS NOTES ON THE BASIC MATHEMATICS OF DIGITAL PROCESSING OF SEISMIC DATA", edited by Mel. Carter - Jan 1967.

–PEKAR, L.: "TRANSFORMEE DE FOURIER ET QUELQUES EXAMPLES DE SES APPLICATIONS EN TRAITEMENTS NUMERIQUE DE L'INFORMATION GEOPHYSIQUE", UERAFREP, Mars 1967.