Pengenalan Regresi nonlinier dan Contoh Pemakaiannya dalam Geofisika

Oleh: Suprajitno Munadi

Dewi Putrilin Nuryani

Bambang Triharjanto

SARI

Membuat perumusan analitik (generalisasi) dari beberapa titik pengamatan sering diperlukan dalam analisis data ekonomi dan teknik (termasuk geofisika). Dengan generalisasi tersebut perhitungan-perhitungan yang memerlukan interpolasi dan ekstrapolasi dari titik-titik pengamatan yang ada dapat dilakukan dengan ketelitian yang lebih baik. Untuk itu regresi linier yang banyak dipakai dalam praktek perlu ditingkatkan menjadi regresi nonlinier yang teorinya jauh lebih rumit.

Algoritma regresi non linier yang sederhana dan mudah diprogram telah dicoba diturunkan dengan memanfaatkan aljabar matriks. Tahap-tahap yang diperlukan hanya memerlukan perkalian matriks dan pencarian inversi dari matriks ukuran 3 x 3.

Beberapa percobaan dengan memakai data model maupun data lapangan menunjukkan hasil yang memuaskan.

ABSTRACT

Generalization from several observation points is often needed to facilitate interpolation and extrapolation during the analysis and processing of economical and technical data including geophysical data. In most cases, the linear regression method which is widely used needs to be replaced by the non linear regression which is theoretically more complicated.

An algorithme for non linear regression which is simple and realizable has been derived using matrix algebra.Its steps only consist of matrix multiplications and inversion of 3 x 3 square matrices.

Experiment using model data and field data has demonstrated a good result.

1. PENDAHULUAN

Pada waktu menganalisis data sering kita jumpai keperluan untuk mencari korelasi antara dua variabel pengamatan. Dalam banyak hal korelasi keduanya dapat dianggap mendekati linier sehingga teori regresi linier dalam statistik lebih sering kita pakai.

Dengan berkembangnya permasalahan di dunia teknik, ekonomi, pertanian dan ilmu pengetahuan, anggapan linier tersebut terasa dipaksakan sehingga garis regersi yang dihasilkan akan jauh menyimpang dari yang seharusnya.

Regresi nonlinier sudah dikupas dalam buku-buku matematika teori dalam bentuk yang sukar dipahami bagi kebanyakan insinyur dan tenaga-tenaga peneliti. Sehingga penggunaannya sampai dengan saat ini tidak begitu populer walaupun sebenarnya ketergantungan fenomena alam yang kita amati lebih banyak yang bersifat non linier dari pada yang bersifat linier.

Tulisan ini akan mengupas kembali teori regeresi nonlinier dan menyajikannya dalam bentuk yang mudah dipahami. Dengan demikian amat diharapkan bahwa bagi mereka yang menangani masalah-masalah kenonlinieran dalam pengamatannya dapat memperbaiki hasil-hasil analisisnya. Untuk memudahkan penggunaan teori regresi nonlinier tersebut agar siap pakai dapat dilihat pada lampiran program komputer dalam bahasa *Fortran*. Untuk sementara yang ditangani adalah permasalahan regresi kwadratis/parabolis.

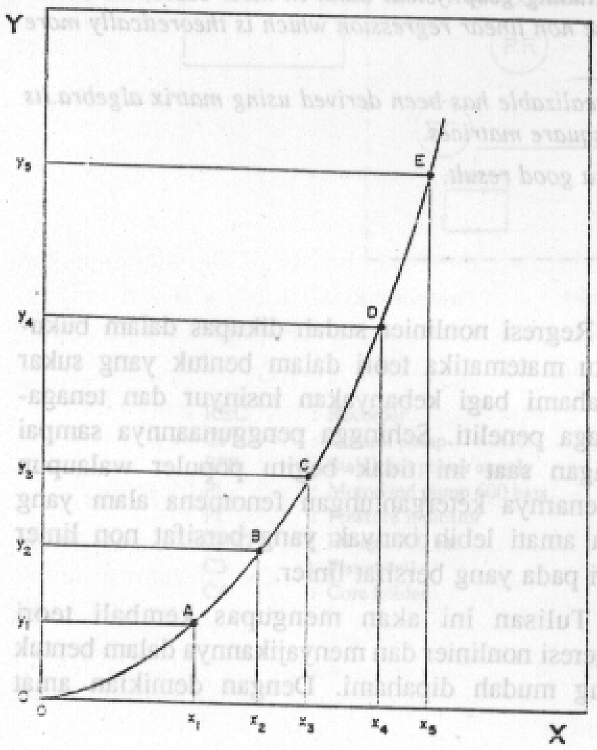
II. CONTOH PERMASALAHAN YANG DIHADAPI

Andaikata kita mempunyai beberapa pengamatan dari dua variabel yang ingin kita cari ketergantungannya (lihat Gambar 1). Ketergantungan ini biasanya ingin dirumuskan secara empiris. Dengan kata lain kita ingin mengeneralisasi beberapa fakta pengamatan tersebut menjadi suatu aturan yang lebih umum.

Dalam sistem koordinat Cartesian pengamatan-pengamatan kedua variabel tersebut dapat dinyatakan dalam titik-titik A,B,C,D,E, dan seterusnya.

Gambar 1.

Garis regresi nonlinier dari lima titik pengamatan. Setiap titik merupakan pasangan dari dua variabel (x_1, y_1), (x_2, y_2) dan seterusnya.



Persoalannya adalah kita harus menentukan sebuah garis yang paling cocok untuk mewakili tempat kedudukan kelima titik pengamatan tersebut di atas. Garis tersebut (dalam hal ini) dapat dianggap sebagai garis regresi nonlinier. Dia sudah barang tentu merupakan sebuah garis yang dapat melakukan interpolasi maupun ekstrapolasi terhadap titik-titik pengamatan yang sudah ada.

III. DASAR MATEMATIKA

Andaikan garis regresi kwadratis tersebut adalah:

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 \quad \text{.......................................} \quad (1)$$

Dari Gambar 1 tersirat persyaratan bahwa semua titik-titik pengamatan harus memenuhi persamaan (1), sehingga:

$$\begin{aligned} y_1 &= a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 \\ y_2 &= a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 \\ y_3 &= a_0 + a_1x_3 + a_2x_3^2 \quad \text{.......................................} \quad (2) \\ y_n &= a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 \end{aligned}$$

x_1, x_2 ...x_n dan y_1, y_2 ...y_n adalah variable-variabel pengamatan yang diketahui harganya, sehingga permasalahannya adalah bagaimana menentukan a_0, a_1 dan a_2.

Untuk itu dapat dipakai aljabar matriks sehingga persamaan (2) dapat dituliskan menjadi :

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ - \\ - \\ - \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ - & - & - \\ - & - & - \\ - & - & - \\ 1 & x_n & x_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad \text{.......} \quad (3)$$

atau secara singkat

$$Y = C^T A \quad \text{.......................................} \quad (4)$$

Karena elemen-elemen dari matriks Y dan CT diketahui maka elemen-elemen dari matriks A dapat dicari dengan jalan sebagai berikut:

Kalikan ruas kiri dan kanan dari persamaan (4) dengan transpose dari C^T yakni C.

$$Cy = CC^T A \qquad (5)$$

yang dapat dituliskan dalam bentuk

$$CY = DA \qquad (6)$$

dengan demikian

$$A = D^{-1}\, CY \qquad (7)$$

ini berarti bahwa a_0, a_1, dan a_2 dapat dihitung dari persamaan (7) dengan jalan:

1. membentuk matriks-matriks D, C, dan Y
2. mengalikan matriks C dengan matriks Y namakan hasilnya E
3. menghitung inversi dari matris D yakni D^{-1}
4. mengalikan matriks D^{-1} dengan matriks E

Matriks C^T dan C adalah matriks yang ukurannya ditentukan oleh banyaknya titik pengamatan. Matriks ini mempunyai jumlah baris sebanyak n (yakni jumlah pengamatan) dan jumlah kolomnya hanya tiga.

Pembentukan matriks $D = CC^T$ sangat memudahkan perhitungan karena dalam perkalian matriks ini, matriks C berukuran (3xn) dan CT berukuran (nx3) sehingga matriks D akan berukuran 3x3). Hal ini menunjukkan bahwa berapapun banyak titik pengamatan, kita hanya perlu melakukan perhitungan inversi dari matriks berukuran (3x3) yang sudah barang tentu mudah dikerjakan. Tuliskan

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{bmatrix}$$

Perkalian antara matriks C dan matriks Y dapat dituliskan sebagai berikut:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & - & - & - & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & - & - & - & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & - & - & - & x_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ - \\ - \\ - \\ y_n \end{bmatrix} \qquad (9)$$

akan menghasilkan matriks E yang elemen-elemennya adalah

$$E = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} \qquad (10)$$

dalam hal ini

$$e_1 = y_1 + y_2 + y_3 + \dots y_n$$
$$e_2 = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + \dots x_ny_n \qquad (11)$$
$$e_3 = x_1^2y_1 + x_2^2y_2 + x_3^2y_3 + \dots x_n^2y_n$$

yang merupakan hasil perkalian matriks ukuran 3xn dengan vektor kolom berukuran n.

Dengan memperhatikan persamaan-persamaan (8), (9) dan (10) maka persamaan (7) yang digunakan untuk menghitung a_o, a_1 dan a_2 dapat dituliskan sebagai:

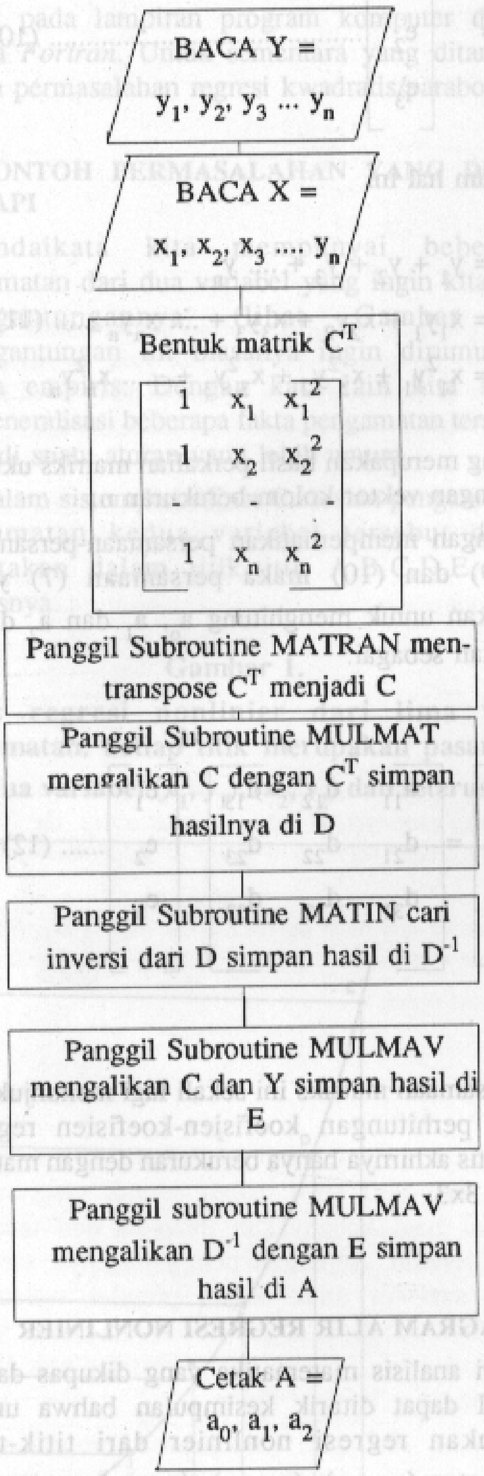
$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} \qquad (12)$$

Persamaan matriks ini sekali lagi menunjukkan bahwa perhitungan koefisien-koefisien regresi kwadratis akhirnya hanya berukuran dengan matriks ukuran 3x3.

IV. DIAGRAM ALIR REGRESI NONLINIER

Dari analisis matematika yang dikupas dalam Bab III dapat ditarik kesimpulan bahwa untuk melakukan regresi nonlinier dari titik-titik pengamatan (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) .... (x_n, y_n) dapat dilakukan tahap-tahap sebagai berikut: (lihat Gambar 2).

Gambar 2. Diagram alir perhitungan regresi non linier.



V. HASIL-HASIL PERCOBAAN DAN PEMBAHASAN

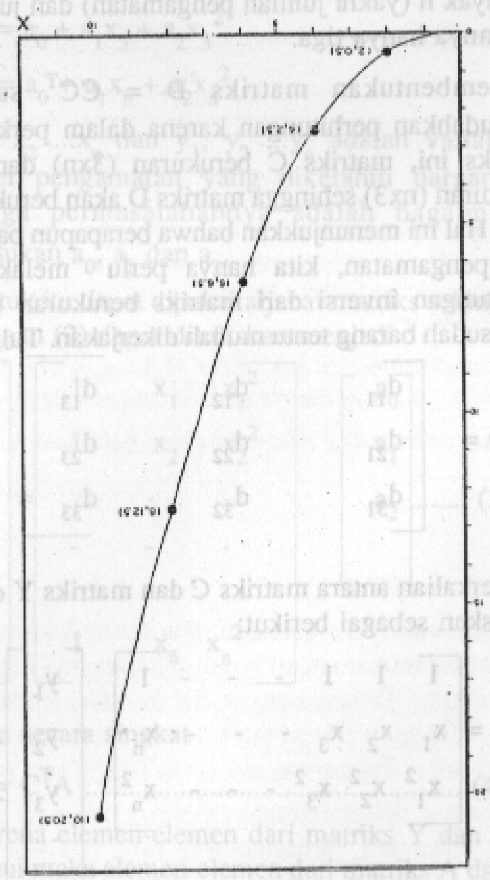
Sebuah program komputer dalam bahasa Fortran (lihat lampiran) telah dikembangkan berdasarkan konsep regresi nonlinier yang telah dibahas di muka.

Gambar 3 menunjukkan bagaimana garis regresi nonlinier yang koefisien-koefisiennya dapat dihitung dengan persamaan (7) dapat dengan mulus mendekati lima buah titik matematika yang diketahui koordinatnya.

Gambar 3.

Hasil regresi nonlinier dari lima buah titik matematik. Koefisien regresinya adalah:

$a_0 = 0.5$ $a_1 = -0.5$ dan $a_2 = 0.25$

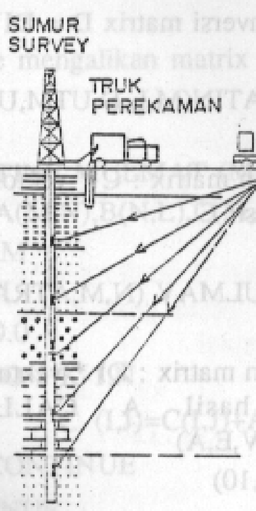


Gambar 5 adalah contoh kasus pemakaian dalam geofisika rekaman *check shot survey* atau disebut juga dengan istilah *well velocity survey* (Gbr. 4) memberikan data tentang waktu rambat gelombang seismik dari sumber gelombang ke posisi-posisi geofon di dalam sumur. Dalam hal ini ada lima posisi. Untuk keperluan konversi dari waktu ke kedalaman secara otomatik (dengan memanfaatkan komputer) kita perlu mengeneralisasi hasil pengamatan tersebut menjadi suatu perumusan analitik, yang kurvanya sering disebut dengan nama *Time Depth Curve*. Kurva tersebut dapat dibuat dengan memanfaatkan rumus garis regresi nonlinier dengan koefisien-koefisien tertentu.

Pemakaian program komputer (terlampir) yang menganut konsep regresi nonlinier yang telah dikupas dalam kertas kerja ini memberikan hasil sebuah garis lengkung yang sangat mendekati titik pengamatan yang ada (lihat Gambar 5).

Gambar 4.

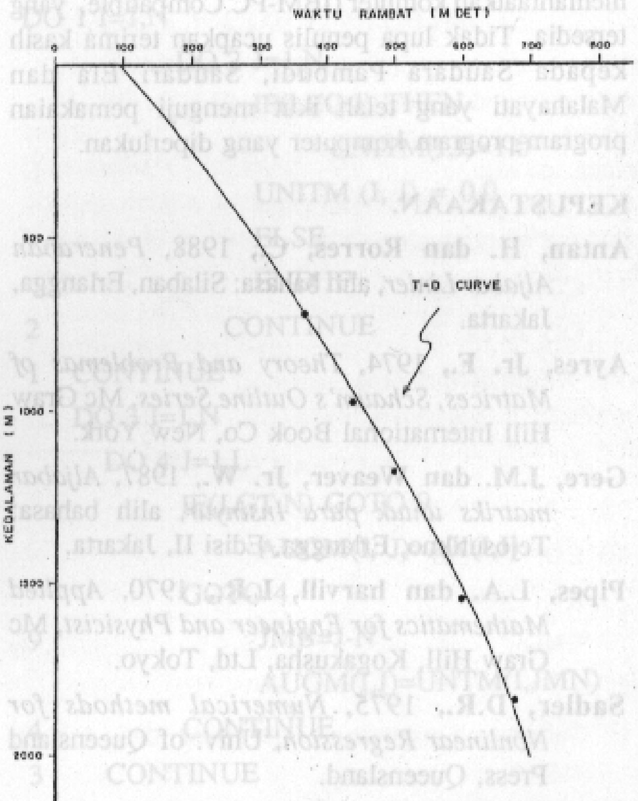
***Check shot survey* atau *Well Velocity Survey* menghasilkan beberapa titik pengamatan; masing-masing merupakan pasangan dari kedalaman (posisi) geofon dan waktu penjalaran gelombang dari sumber ke posisi geofon tersebut.**



Gambar 5.

Hasil regresi nonlinier dari lima buah titik pengamatan. Masing-masing merupakan pasangan dari waktu penjalaran gelombang dan kedalaman yakni (360,-715); (440,-970); (500,-1175); (600,-1540) dan (675,-1835). Koefisien garis regresinya adalah:

$a_0 = 192 \quad a_1 = 1968 \quad a_2 = 1532$



VI. KESIMPULAN

Ketergantungan variabel-variabel yang diamati di alam akan lebih banyak yang bersifat nonlinier dari pada yang bersifat linier.

Regresi nonlinier dalam banyak hal diperlukan untuk mengeneralisasi titik pengamatan yang diskrit ke dalam perumusan analitik, sehingga ekstrapolasi dan interpolasi data dapat dilakukan dengan lebih teliti.

Algoritma regresi linier telah dicoba dipecahkan dengan memanfaatkan aljabar matriks dan memberikan perumusan yang sederhana sehingga mudah dipahami.

Percobaan pemakaian algoritma di atas untuk data model maupun data geofisika *(check shot survey/well velocity survey)* telah menunjukkan hasil yang memuaskan.

Ucapan terima kasih

Percobaan-percobaan dalam rangka pengembangan algoritma dan piranti lunak dari knsep regresi nonlinier ini dilakukan di Kelompok Geofisika PPPTMGB "LEMIGAS"dengan memanfaatkan komuter (IBM-PC Compatible, yang tersedia. Tidak lupa penulis ucapkan terima kasih kepada Saudara Pambudi, Saudari Ela dan Malahayati yang telah ikut menguji pemakaian program-program komputer yang diperlukan.

KEPUSTAKAAN.

Antan, H. dan Rorres, C., 1988, *Penerapan Aljabar Linier*, alih bahasa: Silaban, Erlangga, Jakarta.

Ayres, Jr. F., 1974, *Theory and Problemas of Matrices, Schaum's Outline Series*, Mc Graw Hill International Book Co, New York.

Gere, J.M. dan Weaver, Jr. W., 1987, *Aljabar matriks untuk para Insinyur*, alih bahasa: Tejosutikno, Erlangga, Edisi II, Jakarta.

Pipes, L.A. dan harvill, L.R., 1970, *Applied Mathematics for Engineer and Physicist*, Mc Graw Hill, Kogakusha, Ltd, Tokyo.

Sadler, D.R., 1975, *Numerical methods for Nonlinear Regression*, Univ. of Queensland Press, Queensland.

Suprajitno, M., 1990, *Perhitungan matriks dengan FORTRAN*, Andi Offset, Yogja.

LAMPIRAN 1

```
C  Program mencari kefisien garis regresi nonlinear
   dengan menggunakan aljabar matrix.
C
C
C

   REAL*8 X(5),Y(5),Z(5,3),ATRAN(3,5)
   REAL*8 D(5,5), UGM(10,20), UTM(10,10),
   BINV(10,20)_
   REAL*8 AI(10,20),E(3,1),A(10)
   WRITE(*,1)
   READ(*,*)N
   WRITE(*,2)
   M=3
   L=2*M
   READ(*,*)(X(I),I=1,N)
   WRITE(*,3)
   READ(*,*)(Y(I),I=1,N)
C
C  Membentuk matrix Ct
C
   ALL MATRIX(X,N,M,Z)
   WRITE(*,5)
C
C  Menampilkan matrix Ct
C
   ALL PRINTM(N,M,Z)
C
C  Mentranspose matrix Ct menjadi C
C
   CALL  MATRAN(N,M,Z,ATRAN)
C
C  Mengalikan matrix : D = C*Ct
C
   CALL  MULMAT(M.N.M,ATRAN,Z,D)
C
C  Mencari inversi matrix D = DI
C
   CALL  MATIN(M,L,D,UTM,UGM,BINV,AI)
C
C  Mengalikan matrix : C * vektor kolom Y
   dengan hasil E
C
   CALL MULMAV (N,M,ATRAN,Y,E)
C
C  Mengalikan matrix : DI * vektor kolom E
   dengan hasil A CALL MULMAV
   (N,M,BINV,E,A)
   WRITE(*,10)
   CALL RPINTM(M,1,A)
1  FORMAT(5X, Masukkan orde dari Matrix : ',$)
2  FORMAT(/,5X,'Masukkan X :',$
3  FORMAT(/,5X,'masukkan Y : ',$
5  FORMAT (/,5x,'matrix awal : ',$)
```

```
10 FORMAT/,5X,'Koefisien garis regresi non
   linear : ',$)
   STOP
   END
C  Subroutine pembentuk matrix Ct, masukkan
   data dari keyboard
C
C
   SUBROUTINE MATRIX(A,K,N,CT)
   REAL*8A(K),CT(K,N)
   DO 1 I=1,K
        DO 2 J=1,N
           CT(I,J)=0.0
 2      CONTINUE
 1    CONTINUE
C
   DO 3 I=1,K
           DO 4 J=1,N
                IF(J.EQ.1)=1. THEN
                    CT (I, J) = 1
                ELSE
                  CT(I,J)=A(I)**(J-1)
                END IF
 4         CONTINUE
 3  CONTINUE
    RETURN
    END
C
C  Subroutine mengalikan matrix A(m,n) dengan
   B(n,1)
C
   SUBROUTINE MULMAT (M,N,L,A,B,C)
   REAL*8  A(M,N),B(N,L),C(M,L)
   DO 1 I=1.M
   DO 2 J=1.L
   C(I,J)=0.0
       DO 3 K-1,N
           C (I,J)=C(I,J)+A(I,K)*B(K,J)
3      CONTINUE
2    CONTINUE
1  CONITNUE
   RETURN
   END
```

```
C  Subroutine menghitung matrix inversi dengan
   cara
C  membentuk augmented matrix dan eliminasi
   gauss jordan
C
SUBROUTINE MATIN  (N,L,AX, UNITM,
AUGM, AINV, A AI)
REAL*8  AX(N,N),UNITM(N,N),AINV(N,N)
REAL*8  AAI(N,N),AUGM(N,L)
DO 1 I=1,N
            DO 2 J=1,N
               IF(I.EQ.J) THEN
                  UNITM(I,J)=1.0
               UNITM (I, J) = 0.0
               ELSE
               END IF
2             CONTINUE
1  CONTINUE
   DO 3 I=1,N
      DO 4 J=1,L
         IF(J.GT.N) GOTO 9
               AUGM(I,  J)=AX(I,J)
         GOTO 4
9              JMB=J-N
               AUGM(I,J)=UNTM(I,JMN)
4        CONTINUE
3     CONTINUE
      CALL GSJOR(N,L,AUGM)
      DO 6 I=1,N
         DO 7 J=1,N
               JPN=J+N
               AINV(I,J)=AUGM(I,JPN)
               AAI(I,J)=AUGM(I,J)
7        CONTINUE
6  CONTINUE
   RETURN
   END
C
C  Subroutine gauss jordan
```

```
C
    SUBROUTINE GSJOR(N,N1,A)
C   IP = Penggerak pivot
C   I = Penggerak baris
C   J = Penggerak koom
    REAL*8 A(N,N1)
    DO 1 IP=1,N
      DO 2 I=1,N
          IF(I.EQ.IP) GOTO 2
              OP=-A(I,IP)/A(IP,IP)
              DO 3 J=IP,N1
              A(I,J)=A(I,J)+OP*A(IP,J)
3         CONTINUE
2     CONTINUE
1   CONTINUE
    DO 40 I=1,N
      ANORM=A(I,I)
          DO 50 J=1,N1
              A(I,J)=A(I,J)/ANORM
50    CONTINUE
40  CONTINUE
    RETURN
    END
C
C   Subroutine mengitung transpose dari sebuah
    matrix
C
SUBROUTINE MATRAN(N,M,A,ATRAN)
C   I = Indeks baris
C   J = Indeks kolom
REAL*8 A(N,M),ATARN(M,N)
DO 1 I = 1,N
      DO 2 J = 1,M
          ATRAN(J,I) = A(I,J)
2     CONTINUE
1   CONTINUE
    RETURN
    END
C
C   Subroutine perkalian sebuah matrix dengan
    vektor kolom
C
    SUBROUTINE MULMAV(N,M,A,B,C)
    REAL*8 A(M,N),B(N),C(M)
    DO 1 I=1,M
      C(I)=0.0
          DO 2 J=1,N
              C(I)=C(I)+A(I,J)*B(J)
2     CONTINUE
1   CONTINUE
    RETURN
    END
C   Subroutine penampilan pada layar hasil dari
    eksekusi
C   program
    SUBROUTINE PRINTM(K,L,B)
    REAL*8 B(K,L)
    DO 1 I=1,K
      WRITE(*,2)(B(I,J),J=1,L)
1   CONTINUE
2   FORMAT(2X,5(2X,E12.6))]
    RETURN
    END
```

LAMPIRAN 2
PENGEMBANGAN UNTUK REGRESI DERAJAT M

Untuk regresi nonlinier derajat m > 2 beberapa perumusan perlu disesuaikan. Persamaan (3) berubah mejadi

$$\begin{bmatrix} y1 \\ y2 \\ \\ \\ \\ yn \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x1 & x2 & \ldots xm \\ 1 & x22 & x22 & \ldots xm2 \\ - & - & - & \ldots \\ - & - & - & - \\ - & - & - & - \\ 1 & xn & x2n & \ldots xmn \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a0 \\ a1 \\ a2 \\ .. \\ am \\ \end{bmatrix} \quad (A-1)$$

dalam hal ini n adalah jumlah pengamatan.

Sebagai akibat dari perubahan ini matriks D = CC^T yang dalam regresi non linier kwadratis berukuran 3x3 berubah menjadi matriks bujur sangkar dengan ukuran (m +1) x (m + 1). Demikian pula jumlah koefisien yang harus dicari, yang semula 3, atau berubah menjadi m + 1.

Andaikan regresi non linier sampai derajat 3 maka persamaan (12) berubah menjadi.

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & d_{44} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{bmatrix} \quad \text{(A-2)}$$

di mana

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots\ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & & x_n \\ x_1^{\,2} & x_2^{\,2} & x_3^{\,2} & \ldots\ldots & x_n^{\,2} \\ x_1^{\,3} & x_2^{\,3} & x_3^{\,3} & \ldots\ldots & x_n^{\,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \quad \text{(A-3)}$$

Untuk regresi non linier derajat yang lebih tinggi dari 3, ukuran matriks-matriks dalam persamaan (A-1),(A-2) dan (A-3) adalah sama dengan derajat kenonlinieran ditambah satu. Jadi akhirnya kita hanya berurusan dengan matriks ukuran 3x3, 4x4, 5x5, dst.